Conceptos previos

Los movimientos de los planetas, estrellas y otros cuerpos celestes han sido observados por la gente durante miles de años. En la antigüedad, los científicos consideraban a la Tierra como el centro del universo. Así el modelo llamado geocéntrico fue elaborado por el astrónomo griego Claudio Ptolomeo (100-170) en el segundo siglo DC y fue aceptado durante los siguientes 1400 años. En 1543, el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473-1543) sugirió que la Tierra y los otros planetas giraban en órbitas circulares alrededor del Sol (el modelo heliocéntrico).

El astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601) hizo mediciones astronómicas más precisas por un periodo de 20 años y proporcionó una prueba rigurosa de los modelos alternativos del sistema solar. Es interesante observar que estas precisas observaciones sobre los planetas y de 777 estrellas visibles a simple vista se llevaron a cabo con un gran sextante y un compás, sin un telescopio, el cual aún no se había inventado.

El astrónomo alemán Johannes Kepler, quien era ayudante de Brahe, obtuvo los datos astronómicos de este último y empleó casi 16 años en tratar de desarrollar un modelo matemático para el movimiento de los planetas. El análisis completo se resume en tres enunciados, conocidos como las ***leyes de Kepler:***

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los puntos focales.

2. El radio vector trazado desde el Sol hasta un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales

3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

Medio siglo después, Newton demostró que estas leyes son la consecuencia de una fuerza única que existe entre cualesquiera dos masas. La ley de la gravedad de Newton, junto con su desarrollo de las leyes del movimiento, entrega las bases para la solución matemática completa del movimiento de planetas y satélites.

LA TERCERA LEY DE KEPLER.

La tercera ley de Kepler puede predecirse a partir de la ley de gravitación universal. Considere un planeta de masa M_P que se mueve alrededor del Sol de masa M_S en una órbita circular, como en la figura 9.5. Puesto que la fuerza gravitacional ejercida sobre el planeta por el Sol es igual a la fuerza central necesaria para mantener al planeta moviéndose en un círculo,

$$\frac{GM_S M_P}{r^2} = \frac{M_P v^2}{r}$$

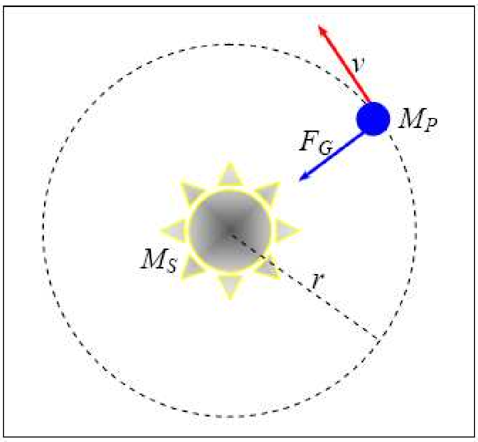
Sin embargo, la velocidad orbital del planeta es simplemente $2\pi r/T$ donde T es su periodo; por lo tanto, la expresión anterior se convierte en

$$\frac{GM_S M_p}{r^2} = \frac{(2\pi r / T)^2}{r}$$

$$\boxed{T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) r^3 = K_S r^3} \qquad (9.3)$$

donde K_S es una constante dada por

$$K_S = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19}\, s^2/m^3$$



La ecuación 9.3 es la tercera ley de Kepler. La ley es válida también para órbitas elípticas si sustituimos r por la longitud del semieje mayor, a (figura 9.6). Advierta que la constante de proporcionalidad, K_S es independiente de la masa del planeta. En consecuencia, la ecuación 9.3 es válida para cualquier planeta. Si hubiéramos considerado la órbita de un satélite alrededor de la Tierra, como la Luna, entonces la constante tendría un valor diferente, con la masa del Sol sustituida por la masa de la Tierra. En este caso, la constante de proporcionalidad es igual a $4\pi^2/GM_T$.

***Ejemplo 9.4**. Calcular la masa del Sol a partir del hecho de que el periodo de traslación de la Tierra en torno al Sol es un año y la distancia de la Tierra al Sol es $1.496x10^{11}$ m.*

Solución: Usando la tercera ley de Kepler, despejando M_S, se obtiene:

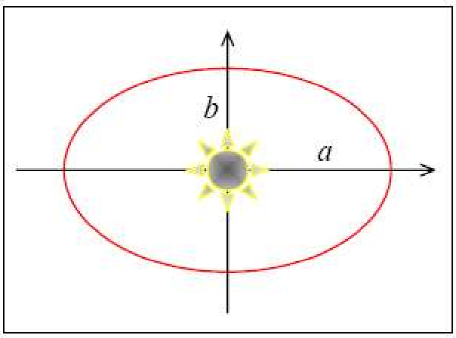
$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Reemplazando los valores numéricos, con $T = 1$ *año* $= 3.156x10^7 s$:

$$M_S = \frac{4\pi^2 \left(1.496 \times 10^{11} m\right)^3}{\left(6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}\right)\left(3.156 \times 10^7 s\right)^2}$$

$$M_S = 1.99x10^{30}\ kg.$$

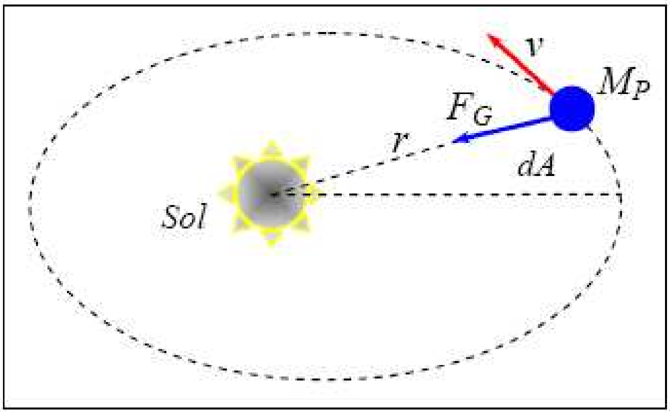
Advierta que el Sol tiene 333000 veces más masa que la Tierra.



La Segunda ley de Kepler y la conservación del momento angular

Considere un planeta de masa M_P que se mueve en torno al Sol en una órbita elíptica, como se ilustra en la figura 9.7. La fuerza gravitacional que actúa sobre el planeta siempre es a lo largo del radio vector, dirigido hacia el Sol. El torque que actúa sobre el planeta debido a esta fuerza es cero puesto que ***F*** es paralelo a ***r***. Esto es,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F(r)\hat{r} = 0$$



Pero recordemos que el torque es igual a la tasa de cambio en el tiempo del momento angular o $\tau = dL/dt$. Por lo tanto, debido a que $\tau = 0$, el momento angular ***L*** del planeta es una constante del movimiento:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = M_P \vec{r} \times \vec{v} = constante$$

En virtud de que ***L*** es una constante del movimiento, vemos que el movimiento del planeta en cualquier instante está restringido al plano formado por ***r*** y ***v***. Este importante resultado significa que:

Tanto el momento angular total como la energía total del sistema Sol - planeta son constantes del movimiento.

Podemos relacionar este resultado con la siguiente consideración geométrica. El radio vector $\boldsymbol{r}$ en la figura 9.7 barre un área dA en un tiempo dt. Esta área es igual a la mitad del área $|\bar{r} \times d\bar{r}|$ del paralelogramo formado por los vectores $\boldsymbol{r}$ y $d\boldsymbol{r}$. Puesto que el desplazamiento del planeta en un tiempo dt es $dr = \boldsymbol{v}dt$, obtenemos

$$dA = \frac{1}{2}|\bar{r} \times d\bar{r}| = \frac{1}{2}|\bar{r} \times \bar{v}dt| = \frac{L}{2M_P}dt$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_p} = constante}$$

donde $\boldsymbol{L}$ y M_P son constantes del movimiento. Así pues, concluimos que el radio vector desde el Sol hasta un planeta barre área iguales en tiempos iguales. Este resultado es la segunda ley de Kepler.

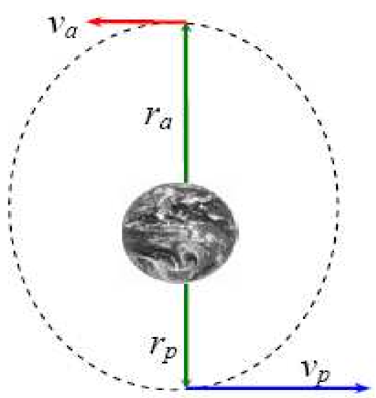
La segunda ley de Kepler no revela la naturaleza inversa al cuadrado de la fuerza de gravedad. Aunque no lo demostramos aquí, la primera ley de Kepler es una consecuencia directa del hecho de que la fuerza gravitacional varía como $1/r^2$. Esto es, bajo una ley de fuerza del inverso al cuadrado, es posible demostrar que las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en un foco.

Ejemplo 9.5. *Un satélite de masa M_S se mueve en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Las distancias mínima y máxima al satélite desde la Tierra reciben el nombre de perihelio (r_p en la figura 9.8) y afelio (indicado por r_a). Si la velocidad del satélite en r_p es v_p, ¿cuál es su velocidad en r_a.*

Solución. El momento angular del satélite en relación con la Tierra es $M_S\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$. En los puntos r_a y r_p, $\boldsymbol{v}$ es perpendicular a $\boldsymbol{r}$. En consecuencia la magnitud del momento angular en estos puntos es $L_a = M_S v_a r_a$ y $L_p = M_S v_p r_p$. Debido a que el momento angular es constante, vemos que:

$$M_S v_a r_a = M_S v_p r_p$$

$$v_a = \frac{r_p}{r_a} v_p$$



EL CAMPO GRAVITACIONAL.

Cuando Newton publicó por primera vez su teoría de la gravitación, para sus contemporáneos fue difícil aceptar la idea de un campo de fuerza que pudiera actuar a través de una distancia. Se preguntaban cómo era posible que dos masas interactuaran aun cuando no estuvieran en contacto entre sí. Aunque el propio Newton no pudo responder a esta pregunta, su teoría fue ampliamente aceptada debido a que explicó de manera satisfactoria el movimiento de los planetas.

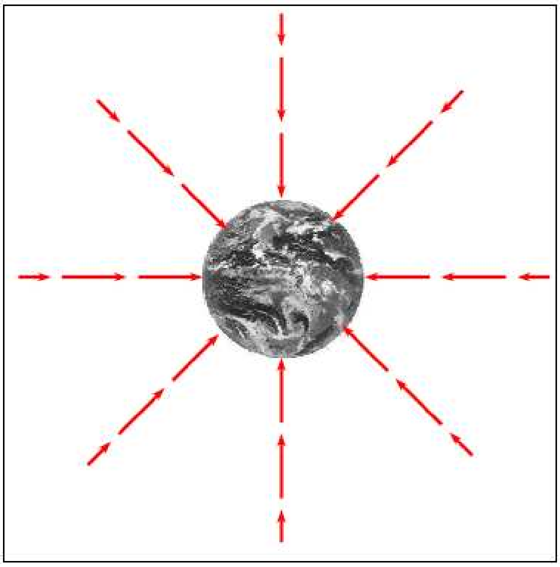
Un planteamiento alternativo en la descripción de la interacción gravitacional, por lo tanto, es introducir el concepto de un ***campo gravitacional*** que cubre cada punto en el espacio. Cuando una partícula de masa m se sitúa en un punto donde el campo es el vector $\mathbf{g}$, la partícula experimenta una fuerza $\mathbf{F_g} = m\mathbf{g}$. En otras palabras, el campo ejerce una fuerza sobre la partícula. Por lo tanto, el campo gravitacional se define por medio de

$$\bar{g} = \frac{\bar{F}_g}{m}$$

Es decir, el campo gravitacional en un punto en el espacio es igual a la fuerza gravitacional experimentada por una masa de prueba situada en el punto, dividido por la masa de prueba. Por ejemplo, considere un objeto de masa m cerca de la superficie terrestre. La fuerza gravitacional sobre el objeto está dirigida hacia el centro de la Tierra y tiene una magnitud mg. Puesto que la fuerza gravitacional sobre el objeto tiene una magnitud $GM_T m/r^2$ (donde M_T es la masa de la Tierra), el campo $\mathbf{g}$ a una distancia r del centro de la Tierra es

$$\bar{g} = \frac{\bar{F}_g}{m} = -\frac{GM_T}{r^2}\hat{r}$$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta radialmente hacia fuera de la Tierra, y el signo menos indica que el campo apunta hacia el centro terrestre, como en la figura 9.9. Advierta que los vectores de campos en diferentes puntos que circundan la Tierra varían tanto en dirección como en magnitud. En una región pequeña cercana a la superficie de la Tierra, el campo hacia abajo g es aproximadamente constante y uniforme, como se indica en la figura 9.9. La ecuación anterior es válida en todos los puntos *fuera* de la superficie terrestre, suponiendo que la Tierra es esférica. En la superficie terrestre, donde $r = R_T$, $\mathbf{g}$ tiene una magnitud de *9.8 N/kg*.



La fig. representa el campo gravitacional terrestre.

Problemas de aplicación.

1.- La masa de Júpiter es aproximadamente 300 veces la masa de la Tierra, y su radio es aproximadamente 10 veces el terrestre. Calcule el valor de g en la superficie de Júpiter.

2.- Urano emplea 84 años en darle la vuelta al Sol. Encuentre el radio de la órbita de Urano como múltiplo del radio de la órbita de la Tierra

3.- Si la distancia del sol a un planeta fuera 5 veces la distancia de la Tierra al Sol, ¿En cuántos años el planeta completa una vuelta alrededor del Sol?

4.- El 19 de Julio de 1969 la órbita de la nave espacial Apolo 11 alrededor de la Luna fue ajustada a una órbita media de *111 km*. El radio de la Luna es *1785 km*. a) ¿Cuántos minutos le tomó completar una órbita? b) ¿Qué velocidad tenía alrededor de la Luna?

5.- Conocidas las distancias entre la Luna, la Tierra y el Sol respectivamente y sus masas, encuentre la razón de las fuerzas gravitacionales ejercidas por la Tierra y el Sol sobre la Luna.

6.- Un satélite meteorológico de *100 kg* describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de *9630 km*. Calcular: a) su rapidez tangencial en la órbita, b) el trabajo necesario para ponerlo en esa órbita. R: a) 5000 m/s, b) $3.75\text{x}10^9$ J.

7.- Un satélite geoestacionario es aquel que se mueve en sincronismo con la Tierra, permaneciendo en una posición fija sobre algún punto del ecuador, completando por lo tanto una vuelta en torno a la Tierra en un día. Calcular: a) su altura, b) su rapidez tangencial. R: a) 35930 km, b) 3075 m/s.

8.- El sistema binario de Plaskett se compone de dos estrellas que giran en una órbita circular en torno de un centro de gravedad situado a la mitad entre ellas. Esto significa que las masas de las dos estrellas son iguales. Si la velocidad orbital de cada estrella es de v y el periodo de cada una es de T, calcule la masa M de cada estrella. R: $2v^3T/\pi G$.

9.- Después de que se agote su combustible nuclear, el destino final de nuestro Sol es colapsarse en una *enana blanca,* es decir, una estrella que tiene aproximadamente la masa del Sol, pero el radio de la Tierra. Calcule a) la densidad promedio de la enana blanca, b) la aceleración de caída libre en su superficie, c) la energía potencial gravitacional de un objeto de 1kg en su superficie. R: a) $1.85\text{x}10^9$ kg/m^3, b) $3.3\text{x}10^6$ m/s^2, c) $-2.1\text{x}10^{13}$ J.

10.- . El cometa Halley se acerca al Sol a una distancia aproximada de 0.57UA, y su periodo orbital es de 75.6 años. (UA es la abreviatura de unidad astronómica, donde 1UA = 1.50×10^6 km es la distancia media Tierra-Sol.) ¿Qué tan lejos del Sol viajará el cometa Halley antes de que inicie su viaje de regreso?

11.- . a) ¿Cuál es velocidad mínima necesaria para que una nave espacial escape del sistema solar, empezando en la órbita de la Tierra? b) El *Voyager I* alcanzó una velocidad máxima de 125000 km./h en su camino para fotografiar Júpiter. ¿Más allá de que distancia desde el Sol esta velocidad es suficiente para escapar del Sistema Solar? R: a) 42 m/s, b) 2.2×10^{11} m.

12.- Para cualquier que órbita alrededor del Sol, la tercera ley de Kepler puede escribirse como $T^2 = kr^3$, donde T es el periodo orbital y r es el semieje mayor de la órbita. a) ¿Cuál es valor de la k si T se mide en años y r se mide en UA? b) Con el valor de k encuentre el periodo orbital de Júpiter si su radio medio desde el Sol es 5.2UA.

13.- Después de una explosión supernova, una estrella puede experimentar un colapso gravitacional hasta alcanzar un estado extremadamente denso conocido como una estrella de neutrones, en el cual todos los electrones y protones se comprimen para formar neutrones. Una estrella de neutrones que tiene una masa aproximada o igual a la del Sol tendría un radio de casi *10 km*. Encuentre a) la aceleración de caída libre en su superficie, y c) la energía requerida para llevar un neutrón de 1.67×10^{-27} *kg* de masa desde su superficie hasta el infinito.